Théorème :

Soit n et p deux entiers naturels.

1. S'il existe une injection de $\mathbb{N}_p$ dans $\mathbb{N}_n$ alors $p \leq n$.
2. S'il existe une surjection de $\mathbb{N}_p$ sur $\mathbb{N}_n$ alors $p \geq n$.
3. S'il existe une bijection de $\mathbb{N}_p$ vers $\mathbb{N}_n$ alors $p = n$.

Démonstration :

1.Procédons par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$.

Pour $p = 0$, la propriété $p \leq n$ est vérifiée.

Supposons la propriété établie au rang $p \geq 0$.

Supposons qu'il existe une injection f de $\mathbb{N}_{p+1}$ dans $\mathbb{N}_n$.

A partir de celle-ci construisons une injection g de $\mathbb{N}_{p+1}$ dans $\mathbb{N}_n$ telle que $g(p+1) = n$.

Si $f(p+1) = n$ alors $g = f$ convient.

Si $f(p+1) \neq n$ introduisons l'application τ de $\mathbb{N}_n$ dans lui-même qui a pour seul effet d'échanger les éléments n et $f(p+1)$. L'application τ est clairement bijective. Considérons ensuite $g = \tau \circ f$. Par composition d'applications injectives, g est injective et par construction $g(p+1) = \tau(f(p+1)) = n$.

Nous sommes donc parvenu à construire une application g comme voulu. Exploitons celle-ci.

Considérons l'application $h : \mathbb{N}_p \to \mathbb{N}_{n-1}$ définie par $\forall x \in \mathbb{N}_p, h(x) = g(x)$.

Comme g est injective, n ne peut avoir d'autres antécédents que $p+1$ et l'application h ci-dessus est bien définie.

De plus g étant injective, $h : \mathbb{N}_p \to \mathbb{N}_{n-1}$, qui est une restriction de g , l'est aussi.

On peut alors appliquer l'hypothèse de récurrence pour conclure $p \leq n-1$ i.e. $p+1 \leq n$.

Récurrence établie.

2. Supposons qu'il existe une surjection f de $\mathbb{N}_p$ sur $\mathbb{N}_n$.

A partir de celle-ci, nous allons construire une injection de $\mathbb{N}_n$ dans $\mathbb{N}_p$ ce qui permettra de conclure.

Pour tout $y \in \mathbb{N}_n$, on peut dire que l'ensemble $f^{-1}(\{y\})$ est non vide car f est surjective.

Considérons alors x_y un élément quelconque de cet ensemble (par ex. $x_y = \min(f^{-1}(\{y\}))$).

Considérons ensuite l'application $g : \mathbb{N}_n \to \mathbb{N}_p$ définie par $\forall y \in \mathbb{N}_n, g(y) = x_y$.

Montrons que g est injective.

$\forall y \in \mathbb{N}_n$, $f(g(y)) = f(x_y) = y$ car x_y est un antécédent de y .

Par suite $f \circ g = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}_n}$, l'application $f \circ g$ est injective et par suite g est injective.

On peut donc conclure à l'existence d'une injection de $\mathbb{N}_n$ dans $\mathbb{N}_p$ et par 1. on a $n \leq p$.

3. Immédiat compte tenu de 1. et 2.